

О СХЕМЕ, ПОВЫШАЮЩЕЙ НАДЕЖНОСТЬ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА, В P_k ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Многозначная логика предоставляет широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях и с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Этим объясняется интерес к задаче повышения надежности схем в полном конечном базисе из k -значных функций ($k \geq 3$). Цель этой статьи – построить схемы, которые можно использовать для повышения надежности в базисе, состоящем из функции Вебба, при произвольном k , а также получить рекуррентные соотношения для ненадежностей предлагаемых схем и исходной схемы.

Материалы и методы. В работе используются известные методы дискретной математики, математической кибернетики и математического анализа. Кроме того, предлагаются новые методы синтеза схем из ненадежных функциональных элементов, а также новые подходы в получении оценок ненадежности схем.

Результаты. В базисе, состоящем из функции Вебба, получены следующие результаты: 1. Построены схемы, которые можно использовать для повышения надежности исходных схем в P_k . 2. Получены рекуррентные соотношения для ненадежностей предлагаемых схем и исходной схемы.

Ключевые слова: функции k -значной логики, ненадежные функциональные элементы, синтез схем из ненадежных элементов.

М. А. Alekhina

ON A CIRCUIT THAT INCREASES RELIABILITY IN THE BASIS CONSISTING OF A WEBB FUNCTION, AT P_k

Abstract.

Background. Multivalued logic opens broad opportunities to develop various algorithms in many fields. It is successfully implied for solving multiple problems and in many technical developments. This explains the interest in the problem of increasing the efficiency of circuits in the complete finite basis consisting of k -valued functions ($k \geq 3$). The aim of the article is to build circuits suitable for increasing reliability in the basis consisting of a Webb function at random k , as well as to obtain recurrent correlations for unreliabilities of the suggested circuits and the initial circuit.

Materials and methods. The work uses well-known methods of discrete mathematics, mathematical cybernetics and mathematical analysis. Besides, the article suggests new methods for synthesizing circuits consisting of unreliable functional gates, as well as new approaches to obtaining circuit unreliability estimates.

Results. The author has obtained the following results for the basis consisting of a Webb function: 1. One has obtained the circuits suitable for increasing reliability

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00451.

of initial circuits at P_k . 2. One has obtained recurrent correlations for unreliabilities of the suggested circuits and the initial circuit.

Key words: functions of k -valued logics, unreliable functional gates, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

Данная работа продолжает исследования по реализации функций k -значной логики надежными схем из ненадежных функциональных элементов в полном базисе, состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} + 1(\bmod k)$ ($k > 5$). При $k = 2$ [1], $k = 3$ [2, 3] задача реализации функций k -значной логики надежными схемами решена ранее. При $k = 4, 5$ [4] найдены схемы, которые можно использовать для повышения надежности исходных схем. В этой статье найдена схема, которую можно использовать для повышения надежности схем при $k > 5$.

Необходимые понятия и определения вводятся так же, как в [5], и предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а функционирование базисного элемента происходит следующим образом.

Пусть $\tilde{a}^2$ – произвольный входной набор базисного элемента E , $V_k(\tilde{a}^2) = \tau$. Считаем, что любое значение, не равное τ , элемент выдает с вероятностью ε , $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2(k-1)}\right)$, т.е. при любом $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ значение $(\tau + j)$ элемент выдает с вероятностью ε . Тогда правильное значение τ элемент E выдает с вероятностью $1 - (k-1)\varepsilon$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция k -значной логики; S – схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S , $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Как и в [5], обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i ($i \in E_k$) на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Тогда $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{\tau+k-1}(S, \tilde{a}^n)$.

Ненадежностью схемы S будем называть наибольшее из чисел $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}^n$ схемы S . Надежностью схемы S считаем число $1 - P(S)$.

Замечание 1. Ненадежность базисного элемента равна $(k-1)\varepsilon$, а надежность элемента равна $1 - (k-1)\varepsilon$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция k -значной логики, а S – любая схема, реализующая функцию f . По схеме S будем строить новые схемы $\psi^i(S)$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$), которые будем применять для повышения надежности исходной схемы S . Опишем процесс построения схем $\psi^i(S)$. Возьмем два экземпляра схемы S и базисный элемент. Соединим выходы схем S с входами элемента. Новую схему обозначим $\psi(S)$. Затем возьмем два экземпляра

схемы $\psi(S)$ и новый базисный элемент. Соединим выходы схем $\psi(S)$ со входами второго базисного элемента. Получим схему $\psi(\psi(S)) = \psi^2(S)$. Действуя аналогично [5], построим схемы $\psi^i(S)$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$). Далее будет удобно использовать обозначение $\psi^0(S) \equiv S$. В частности, $\psi^0(E) \equiv E$.

Возьмем схему $\psi^i(S)$ и заменим в ней все экземпляры схем S на базисные элементы. Обозначим построенную схему через $\psi^i(E)$, а реализующую ее функцию g . Отметим, что число входов этой схемы равно удвоенному числу элементов верхнего яруса схемы, т.е. $2 \cdot 2^{i+1} = 2^{i+2}$. Нетрудно оценить ненадежность схемы, подсчитав число элементов в ней:

$$2^0 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} 2^j = 2^{i+2} - 1,$$

поэтому

$$P(\psi^i(E)) \leq \varepsilon(k-1)(2^{i+2} - 1) \leq \varepsilon(k-1)2^{i+2}, \text{ т.е. } P(\psi^i(E)) \leq \varepsilon(k-1)2^{i+2}.$$

Нетрудно проверить, что на наборе, все компоненты которого равны $(k-1)$, схема $\psi^i(E)$ выдает значение i ($i \in E_k$).

Лемма 1.

$$P_{g \neq i} \left(\psi^i(E), (k-1)^{2^{i+2}} \right) \leq \varepsilon \left(2^{i+1}(k-i) - k - 1 + 2i \right) + \left(2^{i+1} - 1 \right) \left(2^{i+1} - 2 \right) (\varepsilon(k-1))^2.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что схема $\psi^i(E)$ является однородной, неприводимой, каждая ее цепь имеет длину $(i+1)$. Занумеруем элементы каждой цепи, присвоив выходному элементу номер 1, элементам, выходы которых соединены со входами этого элемента, – номер 2 и т.д.; элементу, оба входа которого соединены с полюсами, – номер $(i+1)$.

Пусть $i = 0$. Поскольку $\psi^0(E) \equiv E$, а ненадежность базисного элемента равна $(k-1)\varepsilon$ (см. замечание 1), утверждение леммы верно.

Пусть $i = 1$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\psi^1(E)$, состоящей из трех элементов, на входном наборе длины 4, все компоненты которого равны $(k-1)$, не больше $3(k-1)\varepsilon$. Утверждение леммы также верно.

Пусть $i = 2$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\psi^2(E)$, состоящей из семи элементов, на входном наборе длины 8, все компоненты которого равны $(k-1)$, не больше

$$(k-1)\varepsilon + 2\varepsilon(k-2) + 4\varepsilon(k-2) + C_7^2((k-1)\varepsilon)^2 = \varepsilon(k-1 + 2k-4 + 4k-8) + \\ + 7 \cdot 6((k-1)\varepsilon)^2 = \varepsilon(7k-13) + 42((k-1)\varepsilon)^2.$$

Утверждение леммы верно, а второе слагаемое в последней формуле и в формулировке леммы оценивает сверху вероятность события, состоящего в том, что неисправность любых двух и более элементов приводит к ошибке на выходе схемы $\psi^2(E)$.

Теперь оценим сверху вероятность ошибки на выходе схемы $\psi^i(E)$ и получим

$$(k-1)\varepsilon + 2\varepsilon(k-i) + 4\varepsilon(k-(i-1)-1) + 8\varepsilon(k-(i-2)-2) + \dots + 2^i\varepsilon(k-i) + \\ + (2^{i+1}-1)(2^{i+1}-2)((k-1)\varepsilon)^2 = \varepsilon(k-1) + \varepsilon(k-i)(2+4+8+\dots+2^i) + (2^{i+1}-1) \times \\ \times (2^{i+1}-2)((k-1)\varepsilon)^2 = \varepsilon(2^{i+1}(k-i)-k-1+2i) + (2^{i+1}-1)(2^{i+1}-2)((k-1)\varepsilon)^2.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2^{x+1}(k-x) - k - 1 + 2x$ действительной переменной x и найдем ее наибольшее значение на $[0, k]$. Будем использовать известный из математического анализа факт, что на отрезке непрерывная и дифференцируемая функция принимает наибольшее значение либо в концах отрезка, либо в критических точках из этого отрезка.

Найдем $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2(k-x) - 2^{x+1} + 2$ и приравняем ее нулю: $2^{x+1} \ln 2(k-x) - 2^{x+1} + 2 = 0$. Из этого равенства получим $2^x + \frac{1}{(k-x) \ln 2 - 1} = 0$. Откуда следует, что $2^x = \frac{1}{1 - (k-x) \ln 2}$.

Поскольку в левой части последнего равенства положительная величина, то и справа тоже должна быть положительная величина. Поэтому $1 - (k-x) \ln 2 > 0$, т.е., учитывая, что $x \in [0, k]$, имеем неравенство $0 \leq k-x < 1/\ln 2$, из которого получаем $k - 1/\ln 2 < x \leq k$. Решениями этого двойного неравенства являются $x = k$ и $x = k-1$. Поэтому для нахождения наибольшего значения функции при целых значениях $x \in [0, k]$ вычислим значения функции в этих точках и при $x = 0$. Получим $f(k) = k-1$, $f(0) = k-1$, $f(k-1) = 2^k + k - 3$. Следовательно,

$$2^{i+1}(k-i) - k - 1 + 2i \leq 2^k + k - 3.$$

Таким образом, справедлива лемма 2.

Лемма 2.

$$P_{g \neq i}(\psi^i(E), (k-1)^{2^{i+2}}) \leq \varepsilon(2^k + k - 3) + (2^{i+1}-1)(2^{i+1}-2)(\varepsilon(k-1))^2.$$

Ранее [5] доказана теорема 1.

Теорема 1 [5]. Допустим:

1) произвольную функцию k -значной логики ($k \geq 3$) можно реализовать схемой с ненадежностью не больше p ;

2) схема S_g реализует функцию $g(\tilde{x}^m) \in G$ с ненадежностью $P(S_g)$, причем $v^0, v^1, \dots, v^{k-1}$ – вероятности ошибок схемы S_g на характеристических наборах $\tilde{\alpha}_1^m, \tilde{\alpha}_2^m, \dots, \tilde{\alpha}_k^m$ соответственно и $g(\tilde{\alpha}_1^m) = 0$, $g(\tilde{\alpha}_2^m) = 1$, ..., $g(\tilde{\alpha}_k^m) = k - 1$. Тогда любую функцию k -значной логики f можно реализовать такой схемой A , что $P(A) \leq \max\{v^0, v^1, \dots, v^{k-1}\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2$.

Используя лемму 2 и теорему 1, убедимся в справедливости теоремы 2.

Теорема 2. Пусть f – функция k -значной логики, S – любая схема, реализующая f , $P(S)$ – ненадежность схемы S . Тогда схема $\psi^k(S)$ реализует функцию f , а ее ненадежность удовлетворяет неравенству

$$P(\psi^k(S)) \leq \varepsilon(2^k + k - 3) + (2^k - 1)(2^{k+1} - 2)(\varepsilon(k - 1))^2 + \\ + \varepsilon(k - 1)2^{2k+2}P(S) + (2^{2k+1} - 2^{k+1} - 1)P^2(S).$$

Действительно, $P(\psi^{k-1}(E)) \leq \varepsilon(k - 1)2^{k+1}$, $m = 2^{k+1}$, а по лемме 2 верно неравенство

$$\max\{v^0, v^1, \dots, v^{k-1}\} \leq \varepsilon(2^k + k - 3) + (2^k - 1)(2^{k+1} - 2)(\varepsilon(k - 1))^2.$$

Подставляя эти оценки в теорему 1, убедимся в справедливости теоремы 2.

Замечание 2. Отметим важное свойство схемы $\psi^{k-1}(E)$. Пусть на входы этой схемы подается набор, все компоненты которого равны i ($i \in E_k$). Тогда при отсутствии неисправностей в схеме:

- 1) значение на ее выходе тоже равно i ;
- 2) главное слагаемое вероятности ошибки на выходе зависит только от функционирования нижней подсхемы $\psi^i(E)$, содержащей выход схемы.

Именно поэтому мы исследовали схему $\psi^i(E)$ и с помощью леммы 2 оценили вероятности ошибок на характеристических наборах.

Таким образом, в базисе, состоящем из функции Вебба, получены следующие результаты:

1. Предложена схема, которую можно использовать для повышения надежности исходных схем, реализующих функции k -значной логики.
2. Найдено рекуррентное соотношение для ненадежностей предлагаемых схем и исходной схемы (теорема 2).

Библиографический список

1. **Алехина, М. А.** О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при одностипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, № 3. – С. 17–24.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем, реализующих функции трехзначной логики / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – Т. 21, № 4 (118). – С. 12–24.

3. **Алехина, М. А.** Верхняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 3. – С. 15–27.
4. **Алехина, М. А.** Рекуррентные соотношения для ненадежностей схем в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_4 и P_5 / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 3 (39). – С. 19–30.
5. **Алехина, М. А.** Синтез схем из ненадежных элементов в P_k / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 3–10.

References

1. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, no. 3, pp. 17–24.
2. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2014, vol. 21, no. 4 (118), pp. 12–24.
3. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2015, no. 3, pp. 15–27.
4. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2016, no. 3 (39), pp. 19–30.
5. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 3–10.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики, проректор по научной
работе, Пензенский государственный
технологический университет (Россия,
г. Пенза, проезд Байдукова /
ул. Гагарина, 1а/1)

E-mail: alekhina@penzgtu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics, vice-rector for research,
Penza State Technological University
(1a/1 Baydukova lane/Gagarina street,
Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

О схеме, повышающей надежность в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 70–75. DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-6